

## Aufgaben zu quadratischen Funktionen

① a)  $\overset{\text{a}}{\underset{\uparrow}{1}}x^2 + \overset{\text{b}}{\underset{\uparrow}{-4}}x + \overset{\text{c}}{\underset{\uparrow}{6}} = 0$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

$$= 16 - 24$$

$$= -8 < 0 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

$$1x^2 - 4x + 6 = 2 \quad | -2$$

$$\overset{\text{a}}{\underset{\uparrow}{1}}x^2 + \overset{\text{b}}{\underset{\uparrow}{-4}}x + \overset{\text{c}}{\underset{\uparrow}{4}} = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$= 16 - 16$$

$$= 0 = 0 \Rightarrow 1 \text{ Stelle}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$x - 2 = 0 \quad | +2$$

$$x = 2$$

b)  $\overset{\text{a}}{\underset{\uparrow}{0,5}}x^2 + \overset{\text{b}}{\underset{\uparrow}{1}}x + \overset{\text{c}}{\underset{\uparrow}{1,5}} = 0$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 1,5$$

$$= 1 - 3$$

$$= -2 < 0 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

$$0,5x^2 + 1x + 1,5 = 2 \quad | -2$$

$$\overset{\text{a}}{\underset{\uparrow}{0,5}}x^2 + \overset{\text{b}}{\underset{\uparrow}{1}}x + \overset{\text{c}}{\underset{\uparrow}{-0,5}} = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-0,5)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2 > 0 \Rightarrow 2 \text{ Stellen}$$

$$0,5x^2 + 1x - 0,5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-0,5)}}{2 \cdot 0,5}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{1}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{2}}{1} = -1 + \sqrt{2} \approx 0,4$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{2}}{1} = -1 - \sqrt{2} \approx -2,4$$

$$c) \quad \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{-1}x^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{5}x \underset{\substack{\uparrow \\ c}}{-4} = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)$$

$$= 25 - 16$$

$$= 9 > 0 \Rightarrow 2 \text{ Nullstellen}$$

$$-1x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 3}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-5 - 3}{-2} = 4$$

$$-1x^2 + 5x - 4 = 2 \quad | -2$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a}}{-1}x^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{5}x \underset{\substack{\uparrow \\ c}}{-6} = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)$$

$$= 25 - 24$$

$$= 1 > 0 \Rightarrow 2 \text{ Stellen}$$

$$-1x^2 + 5x - 6 = 0$$

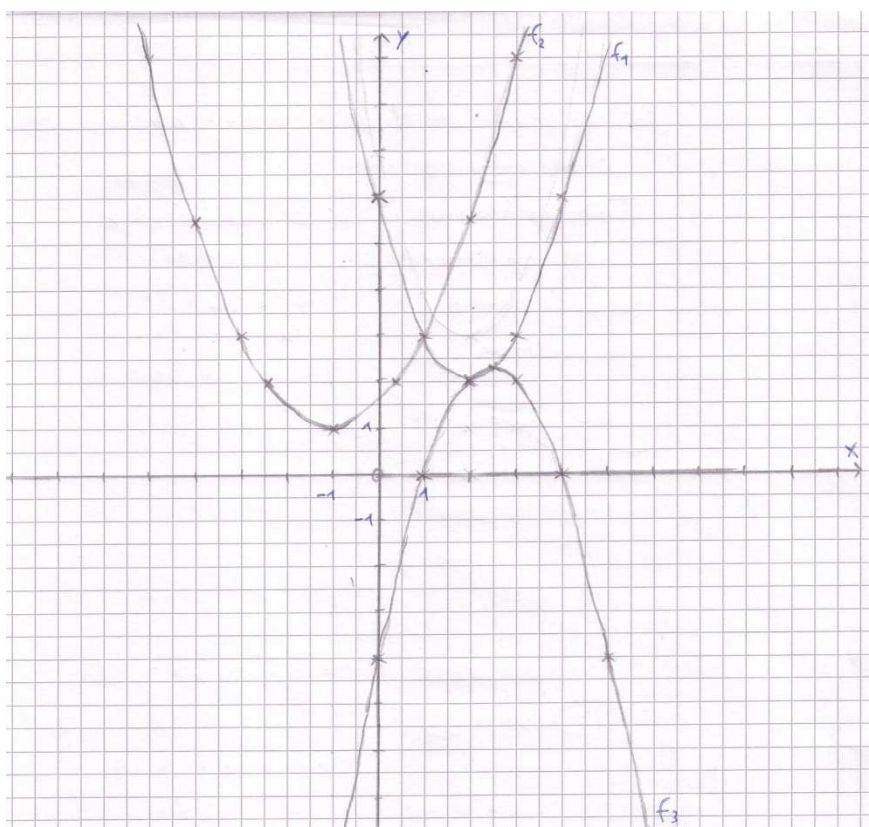
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 1}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-5 - 1}{-2} = 3$$



②

geg.  $y = -\frac{2}{3}(x - x_s)^2 + 4\frac{1}{6}$   
 $P(0|0)$

ges  $x_s$

Lösung

$$0 = -\frac{2}{3}(0 - x_s)^2 + 4\frac{1}{6}$$

$$0 = -\frac{2}{3} \cdot x_s^2 + 4\frac{1}{6} \quad | -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{25}{6} = -\frac{2}{3} x_s^2 \quad | : -\frac{2}{3}$$

$$\frac{25}{6} \cdot \frac{6}{4} = x_s^2$$

$$\frac{25}{4} = x_s^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\frac{5}{2} = |x_s| \quad x_{s1} = \frac{5}{2}$$

$$x_{s2} = -\frac{5}{2}$$

③ Aufgabe:

Bestimme  $k \in \mathbb{R}$  so, dass die Parabel mit der Gleichung  $y = -0,25x^2 + 0,5x - k$  den **Scheitel  $S(x_s/1)$**  hat.

$$y = -0,25x^2 + 0,5x - k$$

$$y = -0,25(x^2 - 2x + 4k)$$

$$y = -0,25(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 4k) \text{ quad. Ergänz.}$$

$$y = -0,25[(x - 1)^2 - 1 + 4k]$$

$$y = -0,25(x - 1)^2 + 0,25 - k \rightarrow y_s$$

$$y = -0,25(x - 1)^2 + 0,25 - k$$

$$+0,25 - k = y_s$$

$$+0,25 - k = 1 \quad | -0,25$$

$$-k = 0,75 \quad | \cdot (-1)$$

$$\underline{\underline{k = -0,75}}$$

$$\textcircled{6} \quad f_1(x) = a(x - x_5)^2 + y_5 \quad S(5|0)$$

$$a(x - 5)^2 + 0$$

$$f_2(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$a \cdot (x - 1 - \sqrt{5}) \cdot (x - 1 + \sqrt{5})$$

$$a \cdot (x^2 - 2x - 4)$$

$$a \cdot [(x^2 - 2x + 1^2) - 1^2 - 4]$$

$$f_2(x) = a(x+1)^2 - 5$$

⑦ allgemeine quadratische Funktion:  $ax^2 + bx + c$

geg. Schnittpunkt y-Achse  $(0|9)$

c bestimmen:

$S(0|9)$  einsetzen in  $y = ax^2 + bx + c$

$$9 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$\underline{9 = c}$$

$$\rightarrow y = ax^2 + bx + 9$$

I. Scheitelform:  $S(-2|3)$

$$a(x+2)^2 - 3$$

$$a(x^2 + 4x + 4) - 3$$

$$ax^2 + 4ax + 4a - 3$$

$$\hookrightarrow b = 4a$$

II. geg.  $S(-2|-3)$

S einsetzen in Gleichung

$$-3 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 9$$

$$-12 = 4a - 2b$$

I einsetzen in II

$$-12 = 4a - 2 \cdot 4a$$

$$-12 = -4a \quad | : -4$$

$$a = 3$$

a einsetzen in I:

$$b = 4 \cdot 3$$

$$b = 12$$

$$\rightarrow y = 3x^2 + 12x + 9$$

- ⑧ Welche Werte kann die Variable  $t$  annehmen, so dass die folgenden Aussagen richtig sind:

a) Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2 + tx + 1$  verläuft vollständig oberhalb der  $x$ -Achse.

$$\Rightarrow x^2 + tx + 1 > 0 \quad | \quad y_s > 0$$

$$y = x^2 + tx + 1$$

$$= \left[ x^2 + tx + \left(\frac{t}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{t}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left[ x + \frac{t}{2} \right]^2 - \frac{t^2}{4} + 1$$

$$y_s > 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{t^2}{4} > 0 \quad | + \frac{t^2}{4}$$

$$1 > \frac{t^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$4 > t^2 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$2 > |t| \Rightarrow t \in ]-2; 2[$$

quadratische  
Ergänzung

b) Der Scheitel des Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = -x^2 - tx - 2$  liegt auf der  $x$ -Achse

$$\Rightarrow S(x_s | 0)$$

$$y = -1 \cdot (x^2 + tx + 2)$$

$$= -1 \cdot \left[ x^2 + tx + \left(\frac{t}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{t}{2}\right)^2 + 2$$

$$= -1 \cdot \left[ \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + 2 \right]$$

$$= -\left(x + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} - 2$$

$$y_s = 0$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{4} - 2 = 0 \quad | + 2$$

$$\frac{t^2}{4} = 2 \quad | \cdot 4$$

$$t^2 = 8 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$t = \pm\sqrt{8} \Rightarrow \mathcal{L} = \{\pm\sqrt{8}\}$$

quadratische  
Ergänzung

c) Der Scheitel des Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = -x^2 - tx - 2$  liegt auf der  $y$ -Achse.

$$\Rightarrow S(0/y_s)$$

$$y = -1 \cdot (x^2 + tx + 2)$$

$$= -1 \cdot \left[ \left( x + \frac{t}{2} \right)^2 - \left( \frac{t}{2} \right)^2 + 2 \right] \quad \text{quadratische Ergänzung}$$

$$= -1 \cdot \left[ \left( x + \frac{t}{2} \right)^2 - \frac{t^2}{4} + 2 \right]$$

$$= - \left( x + \frac{t}{2} \right)^2 + \frac{t^2}{4} - 2$$

$$x_s = 0$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} = 0 \quad | \cdot 2 \quad | : (-1)$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \{0\}$$

d) Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = tx + 1$  besitzt genau eine Nullstelle

$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , da lineare Funktion  
 $t$  (Steigung)  $\neq 0$

10

# MATHE-AUFGABE

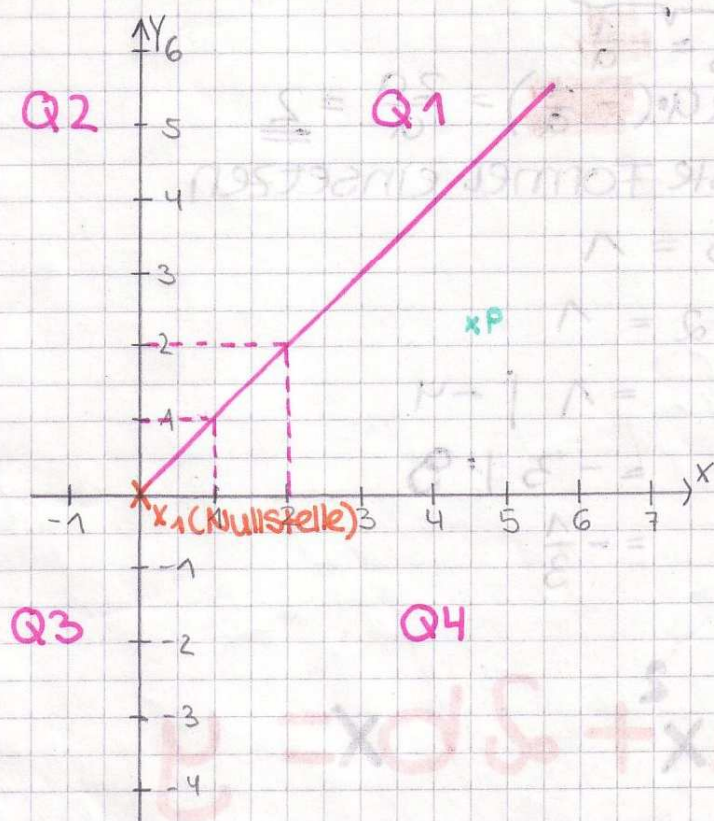
## Aufgabenstellung:

Ermittle die Gleichung derjenigen Parabel, die durch den Ursprung und den Punkt  $P(4,5|2,25)$  geht und deren Scheitel auf der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten liegt!

Prüfe das Ergebnis anhand einer Zeichnung.

## Das wissen wir also:

- $f: x = ax^2 + bx + c \Rightarrow$  ABER:  $c=0$ , weil die Parabel durch den Ursprung geht
- $x_1 = 0$  (Nullstelle)
- $P(4,5|2,25) \rightarrow$  Schnittpunkt auf der Parabel
- Scheitel auf Winkel des 1. Quadranten  $\Rightarrow y_s = x_s$



$\Rightarrow$  Parabel muss nach unten geöffnet sein!

## Lösung:

(1) Punkte einsetzen!

$$ax^2 + bx + \cancel{x}$$

$$a \cdot 4,5^2 + b \cdot 4,5 = 2,25$$

$$20,25a + 4,5b = 2,25$$

$$\frac{81}{4}a + \frac{9}{2}b = \frac{9}{4} \quad | \cdot \frac{4}{9}$$

$$9a + 2b = 1$$

in Dezimalzahlen  
umwandeln, da man  
leichter damit rechnen  
kann

$$\Rightarrow \text{I. } 9a + 2b = 1$$

(2) Scheitelformel verwenden!

$$f(x) = a(x - x_s) + x_s$$

$$= \underbrace{ax^2}_{\text{vgl. a}} - \underbrace{2ax_s}_{\text{vgl. b}} + \underbrace{ax_s^2}_{\text{vgl. c}} + x_s$$

Ausmultiplizieren

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow ax_s^2 + x_s = 0$$

$$ax_s \left( x_s + \frac{1}{a} \right) = 0$$

Ausklammern

$$x_s = -\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow b = -2a \cdot \left( -\frac{1}{a} \right) = \frac{2a}{a} = \underline{\underline{2}}$$

(3) In die erste Formel einsetzen

$$9a + 2b = 1$$

$$9a + 2 \cdot 2 = 1$$

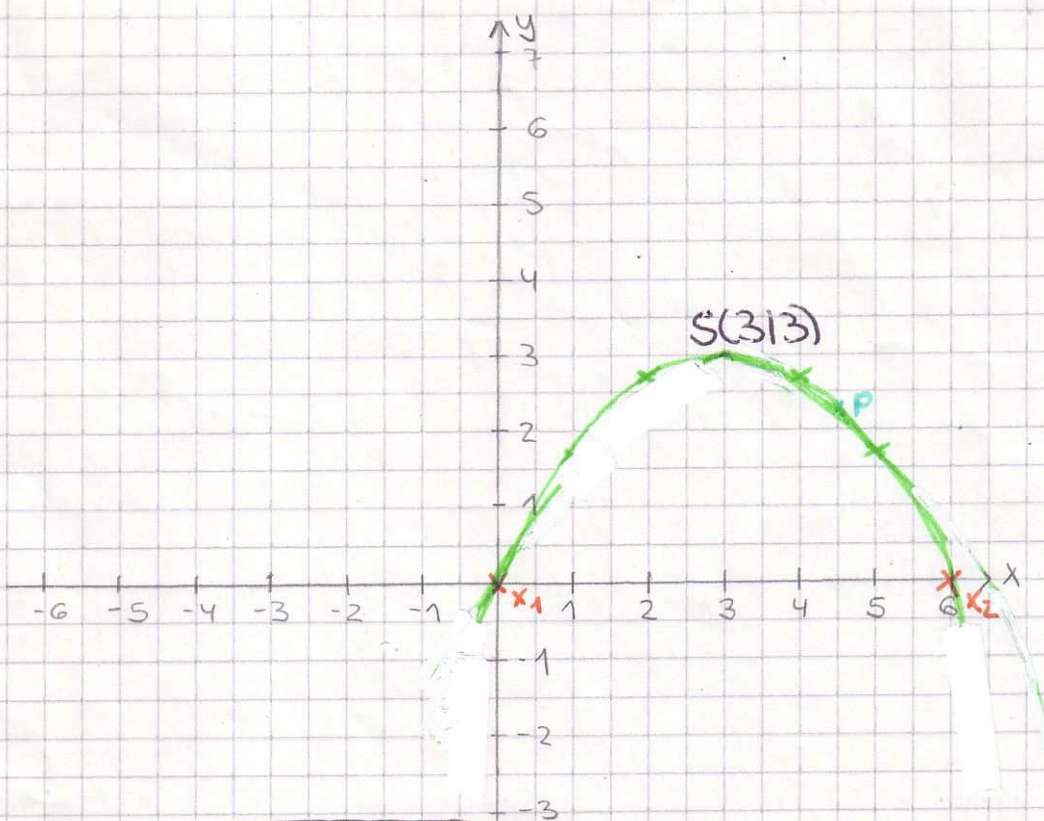
$$9a + 4 = 1 \quad | -4$$

$$9a = -3 \quad | :9$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}ax^2 + 2bx = y$$

Zeichnung.



$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot 0}}{2 \cdot (-\frac{1}{3})} = \underline{\underline{6}}$$